Corentin Bergeron ENS Rennes

Min-Max de Courant-Fischer

Développement classique portant sur l'expression de valeurs propres en fonctions du quotient de Rayleigh. On y montre aussi une application à la continuité des valeurs propres dans le cas hermitien.

Pour ce qui est du recasage, l'utilisation des endomorphismes autoadjoints et du théorème spectral permet son utilisation dans les leçons 152, 153, 157 et 158. Enfin, l'étape 1, et le fait de rechercher des min/max font rentrer ce développement en 219.

I - Le développement

Théorème 1

Soit E un e.v.n. de dimension n. Pour $1 \leq k \leq$,on pose :

$$\mathscr{F}_k = \{F \subset A \ : \ \dim(F) = k\}.$$

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u. Alors :

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathscr{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) = \max_{F \in \mathscr{F}_{m-k+1}} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right).$$

Preuve :

Étape 1 : Bonne définition des min et max

Posons pour $x \in E \setminus \{0\}$, $R_u(x) = \dfrac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$ (quotient de Rayleigh). On remarque que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad R_u(x) = R_u\left(\frac{x}{\|x\|} \right).$$

Par continuité de R_u, ses bornes sur la sphère unité (donc sur $E \setminus \{0\}$) de $F \subset E$ sont atteintes (argument de compacité)

$$\forall F \subset E, \quad \min_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \text{ et } \max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x)$$

sont donc bien définis. Posons donc

$$\mu_k^- = \inf_{F \in \mathscr{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right) \quad \text{et} \quad \mu_k^+ = \sup_{F \in \mathscr{F}_{m-k+1}} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right).$$

Étape 2 : Un premier encadrement

Soit $(e_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ une b.o.n. de E qui diagonalise u :

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad u(e_i) = \lambda_i e_i$$

avec $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u.

On pose $E_k = \text{Vect}[e_1, \ldots, e_k]$ et $F_k = \text{Vect}[e_k, \ldots, e_m]$, $k \in [\![1, m]\!]$.

Pour $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in E_k$, on a :

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k \|x\|^2,$$

d'où

$$\max_{x \in E_k \setminus \{0\}} R_u(x) \leq \lambda_k$$

et on a même égalité en prenant $x = e_k$.

De même,

$$\forall x \in F_k, \quad \langle u(x), x\rangle \geq \lambda_k \|x\|^2$$

et

$$\min_{x \in F_k \setminus \{0\}} R_u(x) \geq \lambda_k$$

avec égalité pour $x = e_k$.

On en déduit l'encadrement :

$$\mu_k^- \leq \lambda_k \leq \mu_k^+.$$

Étape 3 : Démonstraction de l'égalité

Soit $V \in \mathscr{F}_{m-k+1}$. Par la formule de Grassmann, $V \cap E_k \neq \{0\}$. Or pour $g \in V \cap E_k \setminus \{0\}$, on a :

$$\min_{x \in V \setminus \{0\}} R_u(x) \leq R_u(g) \leq \max_{x \in E_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_k$$

d'où $\mu_k^+ \leq \lambda_k$.

De même, pour $W \in \mathscr{F}_k$ et $g \in W \cap F_k \setminus \{0\}$:

$$\lambda_k = \min_{x \in F_k \setminus \{0\}} R_u(x) \leq R_u(g) \leq \max_{x \in W \setminus \{0\}} R_u(x)$$

d'où $\mu_k^- \geq \lambda_k$.

Corollaire 2 *Weyl*

Pour A endomorphisme autoadjoint de E, on note $\lambda_k(A)$ sa k-ième plus petite valeur propre. Alors l'application λ_k est 1-lipshitzienne :

$$\forall A, B \in \mathcal{S}(E), \ |\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq \|A - B\|.$$

Preuve :

Par linéarité :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad R_{u+v}(x) = R_u(x) + R_v(x).$$

Par Courant-Fischer,

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \lambda_1(v) \leq R_v(x) \leq \lambda_m(v).$$

Ainsi,

$$\lambda_1(v) + R_u(x) \leq R_{u+v}(x) \leq \lambda_m(v) + R_u(x), \quad \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

En passant au maximum sur $F \in \mathscr{F}_k$ puis au mininimum :

$$\lambda_1(v) + \lambda_k(u) \leq \lambda_k(u+v) \leq \lambda_m(v) + \lambda_k(u)$$

i.e.

$$|\lambda_k(u+v) - \lambda_k(u)| \leq \max$$

$(\lambda_m(v), \lambda_1(v)) = \|v\|$.
En posant $A = u + v$, $B = u$, on retrouve :

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq \|A - B\|.$$



II - Remarques

1 - Développement assez simple, mais qui nécessite de connaître les grandes lignes, surtout pour l'application à la lipschitzianité des valeurs propres. N'hésitez pas à bien détailler, le développemement peut être un peu court pour certains.

2 - J'ai volontairement bien détaillé la première étape. C'est en effet une étape assez simple, mais qu'on a tendance à passer un peu vite voir oublier.

3 - C'est un joli résultat théorique qui n'est pas utilisable en pratique, cela nécessiterait beaucoup trop de calculs.

III - Références

[FNG] : *Oraux X-ENS*